Содержание

1 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений выглядит примерно так:

$$\begin{cases} y - 2x - z = -3 \\ 3x - y + 4z = 13 \\ 2y + x + 5z = 20. \end{cases}$$

Для удобства восприятия удобно её записывать в «отформатированном виде»:

Пример 1. Вот красиво записанная система уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\cdot x & + & y & - & z & = & -3 \\ 3\cdot x & - & y & + & 4\cdot z & = & 13 \\ x & + & 2\cdot y & + & 5\cdot z & = & 20. \end{array} \right.$$

Решением системы уравнений называются такие числа, которые после подстановки превращают все уравнения в верные равенства.

Пример 2. Числа $(1;2;3)$ т.е. $x{=}1$, $y{=}2$, $z{=}3$ есть решение системы из примера 1. Действительно, после подстановки

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\cdot 1 & + & 2 & - & 3 & = & -3 \\ 3\cdot 1 & - & 2 & + & 4\cdot 3 & = & 13 \\ 1 & + & 2\cdot 2 & + & 5\cdot 3 & = & 20 \end{array} \right.$$

и вычислений получим верные равенства.

1.1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Основной метод решения — *метод исключения неизвестных.* Его суть в многократном применении заклинания

$$\boxed{\text{Выразить одну неизвестную из одного уравнения и подставить в остальные уравнения.}}$$

Пример 3. Решим систему из примера 1 (стр. 1). Сначала выразим y из первого уравнения

$$y = -3 + 2 \cdot x + z$$

и подставим во второе:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - (-3 + 2 \cdot x + z) + 4 \cdot z &= 13 \\ 3 \cdot x + 3 - 2 \cdot x - z + 4 \cdot z &= 13 \\ x + 3 \cdot z &= 10 \end{aligned}$$

и третье

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot (-3 + 2 \cdot x + z) + 5 \cdot z &= 20 \\ x - 6 + 4 \cdot x + 2 \cdot z + 5 \cdot z &= 20 \\ 5 \cdot x + 7 \cdot z &= 26. \end{aligned}$$

В результате получим систему с меньшим числом неизвестных

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 3 \cdot z & = & 10 \\ 5 \cdot x & + & 7 \cdot z & = & 26 \end{array} \right. \tag{1}$$

и формулу для нахождения «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2 \cdot x + z. \tag{2}$$

Теперь применим метод исключения неизвестных к системе (1). Выразим x из первого уравнения

$$x = 10 - 3 \cdot z$$

и подставим в оставшееся уравнение:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (10 - 3 \cdot z) + 7 \cdot z &= 26 \\ 50 - 15 \cdot z + 7 \cdot z &= 26 \\ -8 \cdot z &= -24 \end{aligned}$$

и в формулу (2) для «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2 \cdot (10 - 3 \cdot z) + z = -3 + 20 - 6 \cdot z + z = 17 - 5 \cdot z.$$

Получилась совсем простая система из одного уравнения с одной неизвестной

$$\{-8 \cdot z = -24$$

и две формулы для нахождения двух исключенных неизвестных

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned}$$

Осталось «выразить» значение $z = 3$ и, «подставив» в формулы для нахождения x и y, найти значения $y = 2$ и $x = 1$.

2 Прямая на плоскости в в пространстве

В природе существует множество разнообразных уравнений прямой, но наиболее полезно из них так называемое *параметрическое уравнение прямой*

Оно похоже на подпрограмму симулирующую полет самолетика в компьютерной игрушке — на вход подаем время — на выходе получаем координаты самолетика в этот момент времени.

Для написания уравнения конкретной прямой надо знать две вещи — какую-нибудь точку на прямой (точнее, координаты точки) и какой-нибудь вектор параллельный прямой (точнее, координаты вектора).

Если эта точка $(x_1; y_1; z_1)$ и вектор $(\alpha; \beta; \gamma)$, то параметрическое уравнение выглядит так:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \cdot t \\ y = y_1 + \beta \cdot t \\ z = z_1 + \gamma \cdot t. \end{cases} \tag{3}$$

Буква t в этом уравнении это так называемый параметр — в него можно подставлять время.

При $t = 0$ самолетик находится в точке $(x_1; y_1; z_1)$, при положительных значениях t — перелетает по направлению вектора $(\alpha; \beta; \gamma)$, при отрицательных — наоборот.

Сама прямая это как бы след оставленный этим самолетиком в небе.

Аналогично определяется параметрическое уравнение прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \cdot t \\ y = y_1 + \beta \cdot t, \end{cases} \tag{4}$$

где $(x_1; y_1)$ — точка через которую продет автомобильчик, $(\alpha; \beta)$ — вектор параллельный направлению движения автомобильчика, а сама прямая — след автомобильчика на плоскости.

Упражнение 1. Найдите параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точку $(1; 2)$ и параллельна вектору $(3; 4)$.

Заметим, что поскольку можно брать любую точку на прямой и любой вектор параллельный прямой, то у одной прямой может быть несколько разных уравнений.

Пример 4 (Одна прямая и два уравнения). Рассмотрим два уравнения

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \tag{5}$$

и

$$\begin{cases} x = 10 - 6 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases} \tag{6}$$

Оказывается, эти уравнения задают одну и ту же прямую. Для того, что бы в этом убедиться сначала извлечем из уравнений информацию про точки и вектора. Из первого уравнения достанем точку $(1;2)$ и вектор $(3;1)$. Из второго точку $(10;5)$ и вектор $(-6;-3)$.

Поскольку вектор $(-6;-3)$ можно получить из $(3;1)$ умножением на число -2, эти прямые параллельны.

А так как при подстановке в первое уравнение числа 3 в параметр t получается точка $(10;5)$, получается, что у этих прямых есть общая точка.

Следовательно, эти прямые совпадают.

Пример 5 (прямая по двум точкам). Даны две точки, $A = (1;2)$ и $B = (3;7)$

Требуется найти уравнение прямой проходящей через эти точки.

Вспомним, (см. раздел 2) что нам понадобится точка на прямой (она у нас есть) и вектор, параллельный прямой (подойдет $\vec{AB} = (3-1; 7-3) = (2;4)$). Итак, записываем:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t. \end{cases}$$

Пример 6 (про столкновение автомобилей). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 3 + 1 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Определить, столкнутся ли они.

Столкновение — это когда два автомобиля находятся в одно время в одном месте. Для решения достаточно соединить два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

и решить её.

Получится $x = 4$, $y = 3$, $t = 1$. Т.е. они столкнутся в точке $(4;3)$ в момент времени 1.

Аналогичная задача:

Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

Соединив два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

обнаружим, что у неё нет решения. Следовательно, эти автомобильчики не столкнутся.

Пример 7 (Задача про пересечение прямых). Даны уравнения двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 6 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 2 \cdot t \end{cases}$$

найти точку пересечения.

Будем считать, что это уравнения движения двух автомобильчиков и будем искать точку пересечения их траекторий.

Точка пересечения траекторий — это когда два автомобиля находятся в одном месте но не обязательно в одно время. (Время разное, и этим задача о пересечении отличается от задачи о столкновении. См. пример 6).

Для решения мы обозначим время в уравнениях движения разных автомобильчиков разными буквами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta \end{cases}$$

и соединим их в одну систему:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \\ x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta. \end{cases}$$

Решив её, получим $x = 7$, $y = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Таким образом, точка пересечения прямых — $(7; 4)$. Если представлять эти прямые как траектории автомобильчиков, то мы также узнали, что первый автомобильчик был в этой точке в момент времени 2 а второй в момент времени 1.

Упражнение 2. Первая прямая проходит через точки $(9; -1; 10)$ и $(11; 0; 12)$. Вторая прямая проходит через точки $(3; -4; 9)$ и $(3; -4; 10)$. Найдите точку пересечения этих прямых.

Ответы на упражнения

Упр. 1. Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t \end{cases}$$

Упр. 2. Ответ: $(3; -4; 4)$. Для решения следует найти уравнения прямых так, как это сделано в примере 5 (стр. 4). Затем найти точку пересечения как в примере 7

Предметный указатель