Если эта точка $(x_1; y_1; z_1)$ и вектор $(\alpha; \beta; \gamma)$, то параметрическое уравнение выглядит так:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \cdot t \\ y = y_1 + \beta \cdot t \\ z = z_1 + \gamma \cdot t. \end{cases} \tag{3}$$

Буква t в этом уравнении это так называемый параметр — в него можно подставлять время.

При $t = 0$ самолетик находится в точке $(x_1; y_1; z_1)$, при положительных значениях t — перелетает по направлению вектора $(\alpha; \beta; \gamma)$, при отрицательных — наоборот.

Сама прямая это как бы след оставленный этим самолетиком в небе.

Аналогично определяется параметрическое уравнение прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \cdot t \\ y = y_1 + \beta \cdot t, \end{cases} \tag{4}$$

где $(x_1; y_1)$ — точка через которую продет автомобильчик, $(\alpha; \beta)$ — вектор параллельный направлению движения автомобильчика, а сама прямая — след автомобильчика на плоскости.

Упражнение 1. Найдите параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точку $(1; 2)$ и параллельна вектору $(3; 4)$.

Заметим, что поскольку можно брать любую точку на прямой и любой вектор параллельный прямой, то у одной прямой может быть несколько разных уравнений.

Пример 4 (Одна прямая и два уравнения). Рассмотрим два уравнения

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \tag{5}$$

и

$$\begin{cases} x = 10 - 6 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases} \tag{6}$$

Оказывается, эти уравнения задают одну и ту же прямую. Для того, что бы в этом убедиться сначала извлечем из уравнений информацию про точки и вектора. Из первого уравнения достанем точку $(1; 2)$ и вектор $(3; 1)$. Из второго точку $(10; 5)$ и вектор $(-6; -3)$.

Поскольку вектор $(-6; -3)$ можно получить из $(3; 1)$ умножением на число -2, эти прямые параллельны.

А так как при подстановке в первое уравнение числа 3 в параметр t получается точка $(10; 5)$, получается, что у этих прямых есть общая точка.

Следовательно, эти прямые совпадают.

Пример 5 (прямая по двум точкам). Даны две точки, $A = (1; 2)$ и $B = (3; 7)$

Требуется найти уравнение прямой проходящей через эти точки.

Вспомним, (см. раздел 2) что нам понадобится точка на прямой (она у нас есть) и вектор, параллельный прямой (подойдет $\vec{AB} = (3 - 1; 7 - 3) = (2; 4)$). Итак, записываем:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t. \end{cases}$$

Пример 6 (про столкновение автомобилей). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 3 + 1 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Определить, столкнутся ли они.

Столкновение — это когда два автомобиля находятся в одно время в одном месте. Для решения достаточно соединить два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

и решить её.

Получится $x = 4$, $y = 3$, $t = 1$. Т.е. они столкнутся в точке $(4; 3)$ в момент времени 1.

Аналогичная задача:

Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

Соединив два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

обнаружим, что у неё нет решения. Следовательно, эти автомобильчики не столкнутся.

Пример 7 (Задача про пересечение прямых). Даны уравнения двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 6 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 2 \cdot t \end{cases}$$

найти точку пересечения.

Будем считать, что это уравнения движения двух автомобильчиков и будем искать точку пересечения их траекторий.

Точка пересечения траекторий — это когда два автомобиля находятся в одном месте но не обязательно в одно время. (Время разное, и этим задача о пересечении отличается от задачи о столкновении. См. пример 6).

Для решения мы обозначим время в уравнениях движения разных автомобильчиков разными буквами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \end{cases}$$